CONCOURS SPÉCIAL T'

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 6

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, considéré comme $\mathbb{R}$-algèbre. Étant donné un sous-groupe G du groupe additif $\mathbb{C}$ non réduit à $\{0\}$, on note Vect (G) le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ engendré par G et Cont (G) le plus grand sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ contenu dans G ; on pose alors :

(1) $$r(G) = \dim \mathrm{Vect}(G) \quad \text{et} \quad d(G) = \dim \mathrm{Cont}(G).$$

On pose :

(2) $$\delta(G) = \inf |a|, \quad \text{où } a \text{ parcourt } G - \{0\}.$$

On dit que G est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$ si $\delta(G) > 0$ et on montre que cela équivaut à dire que G est fermé dans $\mathbb{C}$ et que $d(G) = 0$.

Dans la partie I, on prouve que les sous-groupes discrets G de $\mathbb{C}$ tels que $r(G) = 1$ sont les sous-groupes de la forme $G = \mathbb{Z}e$, où $e \neq 0$; dans la partie II, on prouve que les sous-groupes discrets G de $\mathbb{C}$ tels que $r(G) = 2$ sont les sous-groupes de la forme $G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$, où (e_1, e_2) est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$; un tel sous-groupe est appelé réseau de base (e_1, e_2). (On dit que G est somme directe de deux sous-groupes G_1 et G_2, ce qu'on écrit $G = G_1 \oplus G_2$, si tout élément a de G s'écrit de manière unique sous la forme $a = a_1 + a_2$, où $a_1 \in G_1$ et $a_2 \in G_2$.) L'ensemble D constitué des points $z = xe_1 + ye_2$, où $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|y| \leqslant \frac{1}{2}$ s'appelle alors cellule fondamentale associée au réseau $G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$.

Dans la partie III, on étudie les familles sommables $(u_a)_{a \in A}$ de nombres complexes indexées par un ensemble dénombrable A ; dans la suite du problème, A est une partie d'un sous-groupe discret G de $\mathbb{C}$.

Dans la partie IV, un sous-groupe $G = \mathbb{Z}e$, $e \neq 0$, étant donné, on étudie et on calcule les fonctions e-périodiques (dites simplement périodiques) définies sur $\mathbb{C}$ privé de $\mathbb{Z}e$ par les relations :

(3) $$S_e(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - ne)^2} \quad \text{et} \quad T_e(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\frac{1}{z - ne} + \frac{1}{ne} \right].$$

Enfin, dans la partie V, un réseau $G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ étant donné, on étudie les fonctions à la fois e_1-périodiques et e_2-périodiques (dites doublement périodiques) définies sur $\mathbb{C}$ privé de $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ par les relations :

(4) $$V(z) = \sum_{a \in G} \frac{1}{(z - a)^3} \quad \text{et} \quad W(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{a \in G \\ a \neq 0}} \left[\frac{1}{(z - a)^2} - \frac{1}{a^2} \right].$$

I. ÉTUDE DES SOUS-GROUPES DE RANG 1

Soit G un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{C}$.

Prouver que si F_1 et F_2 sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ contenus dans G, alors $F_1 + F_2$ l'est aussi. En déduire l'existence du plus grand sous-espace vectoriel Cont (G) contenu dans G.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $r(G) = 1$.

1. *Isomorphisme de* G *avec un sous-groupe* H *de* $\mathbb{R}$.

   a. Soit f un élément non nul de G. Prouver que $G \subset \mathbb{R}f$.

   b. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}f$ définie par $\varphi(t) = tf$. Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et que φ induit un isomorphisme du groupe $H = \varphi^{-1}(G)$ sur G. Prouver que $\mathbb{Z} \subset H$.

   c. Soit P l'ensemble des éléments $t > 0$ de H. On pose $\alpha = \inf_{t \in P} t$. Prouver que $\delta(G) = |f|\alpha$.

2. *Ensemble fondamental de sous-groupe discret de rang 1.*

   Soient e un élément non nul de $\mathbb{C}$, et $G = \mathbb{Z}e$.

   a. Prouver que G est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$, tel que $r(G) = 1$.

   b. Montrer que G est fermé dans $\mathbb{C}$ et que $d(G) = 0$.

3. *Structure des sous-groupes discrets de rang 1.*

   On suppose que $r(G) = 1$ et que G est discret, c'est-à-dire que $\delta(G) > 0$. On définit φ et H comme en 1.

   a. Prouver que H est fermé dans $\mathbb{R}$. On prouvera d'abord que $H \cap]-\alpha, \alpha[= \{0\}$, puis que, pour tout élément t de H, $H \cap]t - \alpha, t + \alpha[= \{t\}$.

   b. En déduire que α appartient à H. Ainsi $\mathbb{Z}\alpha \subset H$.

   c. Montrer que $H = \mathbb{Z}\alpha$. Pour cela, on prouvera que tout élément t de H s'écrit de manière unique sous la forme $t = k\alpha + t'$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant t' < \alpha$, puis on démontrera que $t' = 0$.

   d. Établir finalement que $G = \mathbb{Z}e$, où $e = \alpha f$.

4. *Structure des sous-groupes fermés non discrets de rang 1.*

   On suppose que G est fermé dans $\mathbb{C}$, que $r(G) = 1$ et que $\delta(G) = 0$. On définit φ et H comme en 1.

   a. Prouver que H est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ et qu'il existe une suite (α_n) d'éléments de P convergeant vers 0.

   b. Prouver que, pour toute suite (ρ_n) de nombres réels strictement positifs convergeant vers 0, et pour tout nombre réel $t > 0$,

   (5) $$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{t}{\rho_n}\right] \rho_n = t.$$

   (Pour tout nombre réel $s \geqslant 0$, on note $[s]$ la partie entière de s.)

c. Prouver que, pour tout $t > 0$, $t_n = \left[\frac{t}{\alpha_n}\right] \alpha_n$ appartient à H.

En déduire que $t \in H$.

d. Prouver finalement que $G = \mathbb{R}f$ et $d(G) = 1$.

5. *Structure des sous-groupes fermés de rang 1.*

Soit G un sous-groupe tel que $r(G) = 1$.

a. Montrer que G est discret si et seulement si G est fermé et $d(G) = 0$.

b. Déterminer la structure de tous les sous-groupes fermés de $\mathbb{C}$ tels que $r(G) = 1$.

II. ÉTUDE DES SOUS-GROUPES DE RANG 2

Soit G un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{C}$ tel que $r(G) = 2$.

1. *Isomorphisme de* G *avec un sous-groupe* H *de* $\mathbb{R}^2$.

a. Soient f_1 et f_2 des éléments de G tels que (f_1, f_2) soit une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(x, y) = xf_1 + yf_2$.

Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et que φ induit un isomorphisme de $H = \varphi^{-1}(G)$ sur G.

Prouver que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset H$.

b. On désigne par $\|\varphi\|$ la norme de l'application linéaire φ, $\mathbb{R}^2$ étant muni de la norme euclidienne canonique. On pose $\delta(H) = \inf_{\substack{t \in H \\ t \neq 0}} |t|$. Établir que $\|\varphi^{-1}\| \delta(H) \leqslant \delta(G) \leqslant \|\varphi\| \delta(H)$.

2. *Exemple fondamental de sous-groupe discret de rang 2.*

Soient (e_1, e_2) une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et $G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$. On définit φ et H comme en 1., en prenant $f_1 = e_1$ et $f_2 = e_2$. Ainsi $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

a. Prouver que H est sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$; en déduire que G est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$, tel que $r(G) = 2$.

b. Prouver que G est fermé dans $\mathbb{C}$ et que $d(G) = 0$.

3. *Structure des sous-groupes discrets de rang 2.*

On suppose que $r(G) = 2$ et que $\delta(G) > 0$. On pose $\alpha = \delta(G)$.

a. Prouver que, pour tout élément a de G, $G \cap D_a(\alpha) = \{a\}$, où $D_a(\alpha)$ désigne le disque ouvert de centre a et de rayon α.

En déduire que G est fermé dans $\mathbb{C}$ et que, plus généralement, toute partie Q de G est fermée dans $\mathbb{C}$.

b. Prouver qu'il existe un élément e_1 de G tel que $|e_1| = \delta(G)$. Un tel élément e_1 étant fixé, montrer que la fonction $a \longmapsto |a|$ atteint sa borne inférieure sur G privé de $\mathbb{R}e_1$ en au moins un point e_2. Dans ces conditions, (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Vect}(G) = \mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \subset G$.

c. Soit D la cellule fondamentale associée au réseau $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$.

Prouver que pour tout élément $z' = x'e_1 + y'e_2$ de D, $|z'| \leqslant |e_2|$, puis que $|z'| < |e_2|$.

d. Prouver que $G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$. Pour cela, on établira que tout élément a de G peut s'écrire sous la forme $a = pe_1 + qe_2 + a'$, où $p, q \in \mathbb{Z}$, $a' = x'e_1 + y'e_2 \in D$, et on montrera que $a' = 0$.

4. *Structure des sous-groupes fermés non discrets de rang 2.*

On suppose que G est fermé dans $\mathbb{C}$, que $r(G) = 2$ et que $\delta(G) = 0$.

a. Montrer qu'il existe une suite (b_n) d'éléments non nuls de G convergeant vers 0. On pose $v_n = \frac{b_n}{|b_n|}$. Prouver qu'il existe une suite $(v_{\psi(n)})$ extraite de (v_n) convergeant vers un élément f_1 de $\mathbb{C}$ tel que $|f_1| = 1$.

b. On pose alors $a_n = b_{\psi(n)}$ et $\rho_n = |a_n|$. Ainsi, $\lim_n \frac{1}{\rho_n} a_n = f_1$.

Prouver que, pour tout nombre réel $t > 0$, $g_n = \left[\frac{t}{\rho_n}\right] a_n$ appartient à G.

En déduire, grâce à (5), que tf_1 appartient à G.

Établir enfin que $\mathbb{R} f_1 \subset G$.

c. Montrer qu'il existe un élément f_2 de G tel que (f_1, f_2) soit une base de $\mathrm{Vect}(G) = \mathbb{C}$. Prouver que, dans ces conditions, $G = \mathbb{R}f_1 \oplus H$, où $H = G \cap \mathbb{R}f_2$.

En déduire que, soit $G = \mathbb{C}$, soit $G = \mathbb{R}f_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$, où $e_2 \in H$. Dans chacun de ces cas, déterminer $\mathrm{Cont}(G)$ et $d(G)$.

5. *Structure des sous-groupes fermés de rang 2.*

Indiquer comment les résultats de I.5. se transposent au cas où G est un sous-groupe fermé tel que $r(G) = 2$.

III. FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES

On dit qu'un ensemble A est infini dénombrable s'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ sur A. On dit qu'une suite $(J_n)_{n>0}$ de parties finies de A est exhaustive dans A si (J_n) est croissante et si $\bigcup_n J_n = A$. On observera qu'il existe de telles suites (J_n), par exemple $J_n = \varphi([0, n])$. Inversement, on admettra que si un ensemble infini A est de la forme $A = \bigcup_n J_n$, où J_n est une telle suite, alors A est infini dénombrable.

1. *Exemples d'ensembles dénombrables.*

Prouver que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont infinis dénombrables et, plus généralement, que toute partie infinie A de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable. Montrer que tout sous-groupe discret G non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{C}$ est infini dénombrable. (On précisera dans chacun de ces cas une suite exhaustive.)

2. *Familles sommables de nombres réels positifs.*

Soit A un ensemble infini dénombrable et $(u_a)_{a \in A}$ une famille de nombres réels positifs indexée par A. Pour toute partie finie J de A, on pose :

(6) $$s_J = \sum_{a \in J} u_a, \quad \text{en convenant que } s_\varnothing = 0.$$

On note s l'élément de $[0, +\infty]$ défini par $s = \sup_J s_J$, J parcourt l'ensemble des parties finies de A.

On dit que $(u_a)_{a \in A}$ est sommable si $s < +\infty$; le nombre réel positif s s'appelle alors somme de (u_a) et se note $s = \sum_{a \in A} u_a$.

Prouver qu'il est équivalent de dire :

i. la famille (u_a) est sommable ;

ii. pour toute suite exhaustive (J_n), la suite (s_{J_n}) est majorée ;

iii. il existe une suite exhaustive (J_n) telle que (s_{J_n}) soit majorée.

Prouver que, dans ces conditions, $s = \lim_n (s_{J_n})$.

Autrement dit,

(7) $$\sum_{a \in A} u_a = \lim_n \sum_{a \in J_n} u_a .$$

3. *Familles sommables de nombres complexes.*

Soit maintenant $(u_a)_{a \in A}$ une famille de nombres complexes indexée par A. On définit les sommes s_J par la relation (6). On dit que (u_a) est sommable si la famille de nombres réels positifs $(|u_a|)$ l'est. On pose alors $\sigma_J = \sum_{a \in J} |u_a|$ et $\sigma = \sup_J \sigma_J$.

a. Soit $(u_a)_{a \in A}$ une famille sommable de nombres complexes et (J_n) une suite exhaustive dans A.

Prouver que la suite (s_{J_n}) est de Cauchy. Pour cela, on montrera que pour tout $n \geqslant 0$ et tout $p > 0$, $|s_{J_{n+p}} - s_{J_n}| \leqslant \sigma_{J_{n+p}} - \sigma_{J_n}$. On pose alors $s = \lim_n s_{J_n}$.

b. Prouver que s est indépendant du choix de la suite exhaustive (J_n). On notera (J'_n) une autre suite exhaustive et on établira que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$|s_{J'_n} - s_{J_n}| \leqslant |\sigma_{J_n \cup J'_n} - \sigma_{J_n}| + |\sigma_{J'_n} - \sigma_{J_n \cup J'_n}| .$$

Le nombre complexe s s'appelle somme de la famille u_a et se note $s = \sum_{a \in A} u_a$. Vérifier que cette définition est compatible avec celle du 2. lorsque $u_a \geqslant 0$. Prouver que

(8) $$\left| \sum_{a \in A} u_a \right| \leqslant \sum_{a \in A} |u_a| .$$

4. *Propriétés fondamentales des familles sommables.*

a. On suppose que $A = \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente et que, dans ces conditions,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

b. Soient A et B des ensembles infinis dénombrables et φ une bijection de A sur B. Soit $(v_b)_{b \in B}$ une famille de nombres complexes indexée par B et $(u_a)_{a \in A}$ la famille définie par $u_a = v_{\varphi(a)}$. Montrer que (u_a) est sommable si et seulement si (v_b) l'est et que, dans ces conditions,

$$\sum_{a \in A} u_a = \sum_{b \in B} v_b .$$

On étudiera d'abord le cas des familles de nombres réels positifs. On étudiera ensuite le cas général, en observant que si (J_n) est exhaustive dans A, $\varphi(J_n)$ l'est dans B.

c. Montrer que l'ensemble $L^1(A)$ des familles sommables $(u_a)_{a \in A}$ est un sous-espace vectoriel du C-espace vectoriel des familles de nombres complexes indexées par A, et que l'application $(u_a) \mapsto \sum_{a \in A} u_a$ est linéaire.

d. Prouver que toute famille $(u_a)_{a\in A'}$ extraite d'une famille sommable $(u_a)_{a\in A}$ est sommable.

Soit $(A_1, A_2, ..., A_p)$ une famille finie de parties disjointes non vides de A telle que $A = \bigcup_{j=1}^{p} A_j$.

Prouver qu'une famille $(u_a)_{a\in A}$ est sommable si et seulement si, pour tout j, $(u_a)_{a\in A_j}$ l'est et que, dans ces conditions,

$$\sum_{a\in A} u_a = \sum_{j=1}^{p} \sum_{a\in A_j} u_a .$$

Pour cela on pourra observer que (J_n) est exhaustive dans A si et seulement si, pour tout j, $(J_n \cap A_j)$ est exhaustive dans A_j.

5. *Familles de fonctions normalement sommables.*

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $(f_a)_{a\in A}$ une famille de fonctions définies sur X et à valeurs complexes.

On dit qu'une famille de nombres réels positifs $(\rho_a)_{a\in A}$ est majorante de (f_a) si pour tout élément a de A et tout élément x de X, $|f_a(x)| \leqslant \rho_a$.

On dit que $(f_a)_{a\in A}$ est normalement sommable sur X s'il existe une famille numérique majorante (ρ_a) sommable.

a. On suppose que $A = \mathbb{N}$. Montrer que (f_n) est normalement sommable sur X si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est normalement convergente sur X.

b. Soit $(f_a)_{a\in A}$ une famille de fonctions normalement sommable sur X et $(\rho_a)_{a\in A}$ une famille numérique majorante. Soit S la fonction définie sur X par $S(x) = \sum_{a\in A} f_a(x)$. Soit (J_n) une suite exhaustive dans A ; pour tout n, on pose $S_n(x) = \sum_{a\in J_n} f_a(x)$. Prouver que, pour tout n et tout x,

$$|S(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{a\in \complement J_n} \rho_a .$$

En déduire que (S_n) converge vers S uniformément sur X.

c. Sous les mêmes hypothèses, établir les résultats suivants :

- si, pour tout $a \in A$, f_a est continue sur X, S l'est aussi ;
- si, pour tout $a \in A$, f_a est de classe C^1 sur un intervalle I et si $(f_a)_{a\in A}$ et $(f'_a)_{a\in A}$ sont normalement sommables sur I, alors S est de classe C^1 sur I et $S' = \sum_{a\in A} f'_a$.

IV. FONCTIONS SIMPLEMENT PÉRIODIQUES ASSOCIÉES À UN SOUS-GROUPE DISCRET DE RANG 1

Soient e un nombre complexe non nul et $G = \mathbb{Z}e$.

Étant donné un élément α de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, on pose $F_\alpha = \mathbb{C} - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D_{ne}(\alpha)$, où $D_{ne}(\alpha)$ est le disque ouvert de centre ne et de rayon $\alpha|e|$.

1. *Une majoration préliminaire.*

Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$ contenue dans F_α.

On se propose de montrer qu'il existe un nombre réel $\beta_K > 0$ tel que, pour tout $z \in K$ et tout $a \in \mathbb{Z}e$, $a \neq 0$,

$$\frac{1}{\left|1 - \frac{z}{a}\right|} \leqslant \beta_K .$$

On pourra introduire un entier $r > 0$ tel que, pour tout élément z de K, $|z| \leqslant r$ et montrer que si $a = ne$, alors

$$\left|1 - \frac{z}{a}\right| \geqslant \frac{1}{r+1} \qquad \text{si } |n| > r,$$

$$\left|1 - \frac{z}{a}\right| \geqslant \frac{\alpha}{r} \qquad \text{si } |n| \leqslant r.$$

2. *Définition des fonctions e-périodiques* S_e *et* T_e.

Soit U l'ouvert $\mathbb{C}$ privé de $G = \mathbb{Z}e$.

a. Prouver que, pour tout élément z de U, la famille $\left(\frac{1}{(z-ne)^2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable (on pourra effectuer une partition de $\mathbb{Z}$ de la forme $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$). On note $S_e(z)$ sa somme.

b. Prouver que, pour toute partie compacte K de F_α, cette famille est normalement sommable sur K. En déduire que S_e est continue sur U.

c. Montrer que, pour tout élément z de U, $z + e$ appartient aussi à U et que $S_e(z+e) = S_e(z)$. (On pourra introduire la bijection φ de $\mathbb{Z}$ sur lui-même définie par $\varphi(n) = n + 1$.) Prouver que S_e est paire.

d. Prouver de même que $\left(\frac{1}{z-ne} + \frac{1}{ne}\right)_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}$ est sommable et que la fonction T_e définie sur U par (3) est continue sur U.

e. Établir que, pour tout élément z de U, $T_e(z+e) = T_e(z)$. (On pourra introduire la suite (J_n) des parties de $\mathbb{Z} - \{0\}$ constituées des éléments p de $\mathbb{Z}$ tels que $|p| \leqslant n$, $p \neq 0$.) Prouver que T_e est impaire.

3. *Calcul des fonctions* S_e *et* T_e.
Les fonctions S_1 et T_1 associées à $e = 1$ sont notées plus simplement S et T.

a. Montrer que, pour tout élément z de U,

$$S_e(z) = \frac{1}{e^2} S\left(\frac{z}{e}\right) \quad \text{et} \quad T_e(z) = \frac{1}{e} T\left(\frac{z}{e}\right).$$

On est ainsi ramené au cas où $e = 1$.

b. Soient z un élément de $U = \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et f la fonction 1-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout élément t de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $f(t) = \cos 2\pi z t$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et paire.

Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f)$, où n parcourt $\mathbb{Z}$. Montrer que $(c_n(f))$ est sommable et que, pour tout nombre réel t,

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{2i\pi nt}.$$

Expliciter cette relation lorsque $t = \frac{1}{2}$.

c. Prouver que, pour tout $z \in U$, $\sin \pi z \neq 0$ et que

$$T(z) = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}. \tag{9}$$

d. Soit z un élément de U n'appartenant pas à $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g(t) = T(tz) - \frac{1}{tz}$. Prouver d'autre part que

$$T'(tz) = -z \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{(tz - n)^2}.$$

En déduire finalement que, pour tout élément z de U,

$$S(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}. \tag{10}$$

V. FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES ASSOCIÉES À UN SOUS-GROUPE DISCRET DE RANG 2

Soient (e_1, e_2) une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et $G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$.

Étant donné un élément α de $\left]0, \frac{1}{2}\delta(G)\right[$, on pose $F_\alpha = \mathbb{C} - \bigcup_{a \in G} D_a(\alpha)$ et $U = \mathbb{C} - G$.

1. *Convergence des séries de Riemann dans le plan.*

On désigne pour $(x, y) \mapsto N(x, y)$ une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et par s un nombre réel strictement positif.

On pose $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$. On se propose de prouver que la famille $\left(\frac{1}{N(b)^s}\right)$, où $b = (p, q)$ parcourt B, est sommable si et seulement si $s > 2$.

a. Dans cette question, on considère la norme particulière N_1 définie par $N_1(x, y) = |x| + |y|$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note J_n l'ensemble des éléments (p, q) de B tels que $|p| + |q| \leqslant n$. Montrer que (J_n) est exhaustive dans B et que

$$\sum_{b \in J_n} \frac{1}{N_1(b)^s} = 4 \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^{s-1}}.$$

Pour cela, pour tout entier $m \geqslant 1$, on calculera le nombre d'éléments $b = (p, q)$ de B tels que $|p| + |q| = m$ (une figure pourra être utile).

En déduire que $\left(\frac{1}{N_1(b)^s}\right)_{b \in B}$ est sommable si et seulement si $s > 2$.

b. Démontrer le résultat annoncé pour une norme N quelconque.

c. On prend maintenant $A = G - \{0\}$. Prouver que la famille $\left(\frac{1}{|a|^s}\right)_{a \in A}$ est sommable si et seulement si $s > 2$. Pour cela, on pourra utiliser l'isomorphisme φ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$ défini par $\varphi(x, y) = xe_1 + ye_2$, qui transforme B en A.

2. *Une majoration préliminaire.*

Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$ contenue dans F_a.
Montrer qu'il existe un nombre réel $\beta_K > 0$ tel que, pour tout $z \in K$ et pour tout $a \in A = G - \{0\}$,

$$\frac{1}{\left|1 - \frac{z}{a}\right|} \leqslant \beta_K.$$

3. *Définition des fonctions doublement périodiques* V *et* W.

a. Prouver que, pour tout élément z de U, la famille $\left(\frac{1}{(z-a)^3}\right)_{a \in G}$ est sommable. On note $V(z)$ sa somme.

b. Prouver que, pour toute partie compacte K de F_a, cette famille est normalement sommable sur K. En déduire que V est continue sur U.

c. Prouver que, pour tout élément z de U, $z + e_1$ et $z + e_2$ appartiennent encore à U et que

$$V(z + e_1) = V(z) \quad \text{et} \quad V(z + e_2) = V(z).$$

d. Prouver de même que, pour tout élément z de U, la famille $\left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2}\right)_{a \in A}$, où $A = G - \{0\}$, est sommable, et que la fonction W définie sur U par (4) est continue sur U.

e. Établir enfin que, pour tout élément z de U,

$$W(z + e_1) = W(z) \quad \text{et} \quad W(z + e_2) = W(z).$$

On pourra introduire la suite (J_n) des parties de A constituées des éléments $pe_1 + qe_2$ tels que $|p| + |q| \leqslant n$, et on posera $W_n(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{a \in J_n} \left[\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2}\right]$.

On prouvera que $W_n(z + e_1) - W_n(z)$ et $W_n(z + e_2) - W_n(z)$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

f. Étudier la parité des fonctions V et W.